Aula 8

Variedades com Bordo

Definição: Diz-se que $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma **variedade diferenciável de dimensão** $m < n$ **com bordo** (mergulhada em $\mathbb{R}^n$) e de classe C^k se, para qualquer ponto $p \in M$, existe uma bola $B(p)$ centrada em p tal que o conjunto dos pontos de M na bola, ou seja o conjunto $M \cap B(p)$, pode ser descrito de uma das duas seguintes formas:

- p **interior à variedade:** Como imagem duma parametrização dada por uma função injetiva $g : B_r(0) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^k(T)$, definida numa bola $B_r(0) \subset \mathbb{R}^m$, centrada na origem,

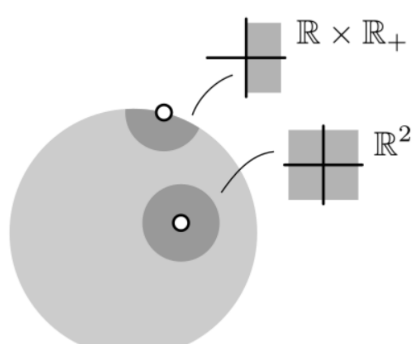
$$B_r(0) = \{(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m : u_1^2 + \cdots u_m^2 < r^2\},$$

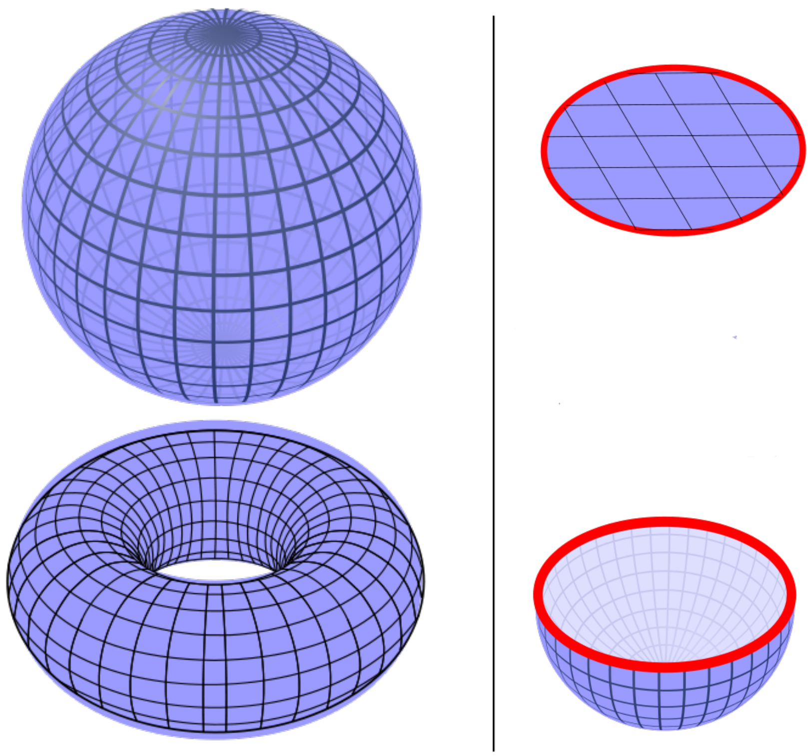
  com inversa contínua $g^{-1} : g(B_r(0)) \to B_r(0)$ e $g(0) = p$.

- p **no bordo da variedade:** Como imagem duma parametrização dada por uma função injetiva $g : B_r^+(0) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^k(T)$, definida numa meia-bola $B_r^+(0) \subset \mathbb{R}^m$, centrada na origem,

$$B_r^+(0) = \{(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m : u_1^2 + \cdots u_m^2 < r^2\} \cap \{u^1 \geq 0\},$$

  com inversa contínua $g^{-1} : g(B_r^+(0)) \to B_r^+(0)$ e $g(0) = p$.





Sem Bordo vs Com Bordo

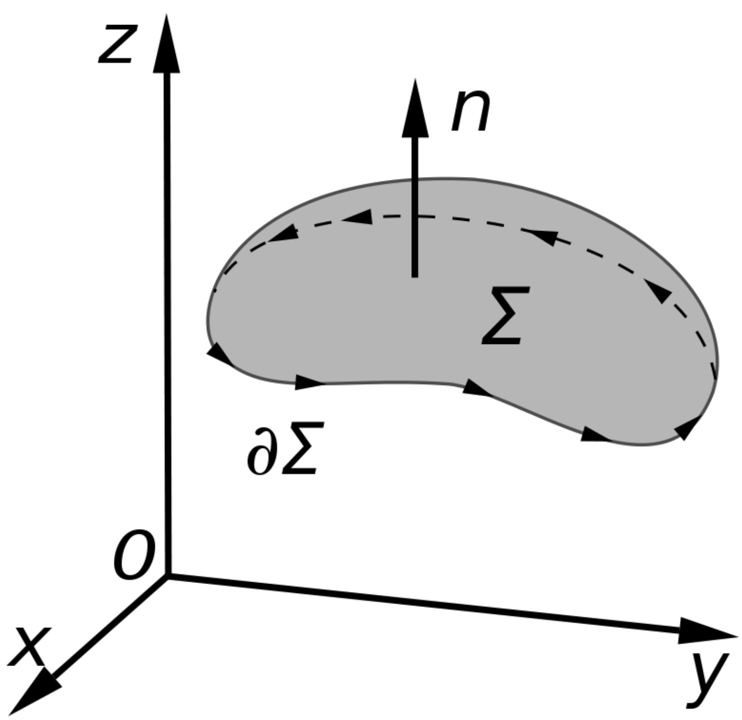
Proposição: O conjunto dos pontos interiores duma variedade com bordo de dimensão m formam uma variedade sem bordo de dimensão m.
O conjunto dos pontos do bordo de uma variedade com bordo de dimensão m formam uma variedade sem bordo de dimensão $m - 1$.

Teorema de Stokes

Teorema: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, isto é, uma variedade de dimensão 2, limitada, orientável e com bordo ∂S seccionalmente regular.
Seja $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe pelo menos C^1 no aberto Ω, com $S \cup \partial S \subset \Omega$. Então, tem-se

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu dS = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\gamma,$$

em que γ é um caminho que percorre ∂S com orientação compatível com a de ν (regra da mão direita).

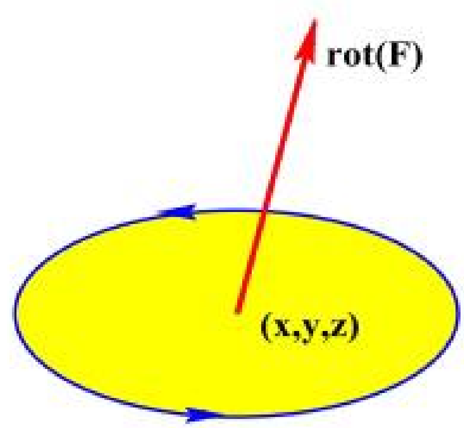


Significado do Rotacional

Proposição: Seja $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$. Então

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \nu = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \oint_{C_\varepsilon(\mathbf{x})} \mathbf{F} \cdot d\gamma,$$

em que $C_\varepsilon(\mathbf{x})$ é a circunferência de raio ε centrada em $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, no plano perpendicular a ν, e orientada no sentido positivo.



Potenciais Vetoriais

Teorema: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto em estrela relativamente à origem e $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe $C^1(\Omega)$ incompressível, ou seja, tal que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$. Então

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \int_0^1 \mathbf{F}(tx, ty, tz) \times (tx, ty, tz)dt,$$

é um **potencial vetorial** de $\mathbf{F}$ em Ω, ou seja

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{F}.$$

Mais genericamente, centrando noutro ponto $p \in \mathbb{R}^3$ qualquer, dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um qualquer aberto em estrela centrado em p e $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe $C^1(\Omega)$ tal que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, existe sempre um potencial vetorial $\mathbf{A}$ (não único) de $\mathbf{F}$ em Ω.

Observação

Dado qualquer campo escalar $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $C^2(\Omega)$, se $\mathbf{A}$ é um potencial vetorial de $\mathbf{F}$ então $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \nabla\phi$ também é porque

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \underbrace{\operatorname{rot}(\nabla\phi)}_{=0} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{F}.$$

Então, fazendo $\phi = -\int A_1(x, y, z)dx$ é sempre possível escolher $\mathbf{B}$ com $B_1 = 0$, por exemplo. Idem para qualquer uma das outras duas componentes.